Revista ENERGEIA ISSN: 1666 - 5732 Vol. VI, Num. 1, 2019 xx - xx
Sociedad Ibero-Americana de
Metodología Económica

EL TEOREMA DE NASH

ADOLFO GARCÍA DE LA SIENRA
Instituto de Filosofía
Facultad de Economía
Universidad Veracruzana
asienrag@gmail.com

El 16 de noviembre de 1949 Solomon Lefschetz comunicó un importante resultado sobre el concepto de equilibrio en juegos de n jugadores debido a John Forbes Nash Jr.[1] El resultado fue publicado en los *Proceedings of the National Academy of Sciences* en 1950.[2] Después de presentar mi traducción de este texto, procederé a dar una explicación matemática detallada del mismo.

El texto de la comunicación de Lefschetz, notable por su brevedad, simplicidad, belleza y profundidad, es el siguiente.

PUNTO DE EQUILIBRIO EN JUEGOS DE *N* PERSONAS

JOHN F. NASH JR.

Uno puede definir un concepto de un juego de n personas en el que cada jugador tiene un conjunto finito de estrategias puras y en el que un conjunto definido de pagos a los n jugadores corresponde a cada n-tuplo de estrategias puras, siendo tomada una estrategia para cada jugador. Para las estrategias mixtas, las cuales son distribuciones de probabilidad sobre las estrategias puras, las funciones de

[1] Tiene interés para los hispanoamericanos en general, y para los mexicanos en especial, saber que Lefschetz es uno de los padres fundadores de la escuela mexicana de matemáticas. Fue honrado por el Presidente Adolfo Ruiz Cortines con la medalla Águila Azteca, máxima condecoración que otorga el Gobierno Mexicano, por sus contribuciones a la formación de jóvenes estudiantes mexicanos. La biblioteca del Instituto de Matemáticas de la UNAM en Cuernavaca lleva su nombre.

[2] Véase Nash 1950 en las referencias al final.

pago son las expectativas de los jugadores, convirtiéndose así en formas polilineales en las probabilidades con las que los varios jugadores juegan sus variadas estrategias puras.

Cualquier n-tuplo de estrategias, una para cada jugador, puede ser considerado como un punto en el espacio producto obtenido multiplicando los n espacios de estrategias de los jugadores. Un n-tuplo tal reacciona a otro si la estrategia de cada jugador en el n-tuplo reactor arroja la expectativa asequible más alta para su jugador contra las $n-1$ estrategias de los otros jugadores en el n-tuplo al que se reacciona. Un n-tuplo que reacciona a sí mismo es llamado un punto de equilibrio.

La correspondencia de cada n-tuplo con su conjunto de n-tuplos reactores da un mapeo uno a muchos del espacio producto en sí mismo. A partir de la definición de reacción vemos que el conjunto de los puntos reactores de un punto es convexo. Usando la continuidad de las funciones de pago vemos que la gráfica del mapeo es cerrada. La cerradura es equivalente a decir: si $P_1, P_2, \ldots, P_n$ y $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ son secuencias de puntos en el espacio producto donde $Q_n \to Q$, $P_n \to P$ y Q_n responde a P_n entonces Q responde a P.

Como la gráfica es cerrada y como la imagen de cada punto bajo el mapeo es convexo, inferimos por el teorema de Kakutani[3] que el mapeo tiene un punto fijo (es decir, un punto contenido en su imagen). Por ende hay un punto de equilibrio.

En el caso bipersonal de suma cero el "teorema principal"[4] y la existencia de un punto de equilibrio son equivalentes. En este caso cualesquiera dos puntos conducen a la mismas expectativas para los jugadores, pero esto no tiene que ocurrir en general.

[3] Kakutani 1941.

[4] Von Neumann y Morgenstern 1947, capítulo 3.

Revista ENERGEIA ISSN: 1666 - 5732 Vol. VI, Num. 1, 2019 xx - xx
Sociedad Ibero-Americana de
Metodología Económica

DESARROLLO MATEMÁTICO DETALLADO DEL TEOREMA DE NASH

ADOLFO GARCÍA DE LA SIENRA

1. El aparato conceptual

Sea $\mathscr{I} = \{1, \ldots, n\}$ el conjunto de los jugadores y, para $i \in \mathscr{I}$, sea S_i el conjunto (finito) de estrategias puras del jugador i. Cada elección de estrategias puras por los jugadores determina un perfil de estrategias $s = (s_1, \ldots, s_n) \in S_1 \times \cdots \times S_n$. Cada uno de estos perfiles, a su vez, brinda una utilidad o pago $u_i(s_1, \ldots, s_n)$ al jugador i. Una *estrategia mixta* del agente i es una distribución de probabilidad σ_i sobre S_i; la probabilidad del evento elemental $s_i \in S_i$ se denota por $\sigma_i(s_i)$. Un perfil de estrategias mixtas es un vector de la forma $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$. El conjunto de las estrategias mixtas del jugador i se denota por Σ_i; $\Sigma = \bigtimes_{i=1}^{n} \Sigma_i$ es el *conjunto de los perfiles de estrategias mixtas*. Una estrategia mixta σ_i genera un espacio de eventos $\mathscr{F}_i$ sobre S_i de la manera usual. Para un perfil dado $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ de estrategias mixtas denotaremos con $\langle S, \mathscr{F}, \sigma \rangle$ el espacio producto

$$\langle S_1, \mathscr{F}_1, \sigma_1 \rangle \otimes \cdots \otimes \langle S_n, \mathscr{F}_n, \sigma_n \rangle,$$

donde la probabilidad $\sigma(s)$ del perfil $s = (s_1, \ldots, s_n)$ está dada por el producto $\prod_{i \in \mathscr{I}} \sigma_i(s_i)$. Obviamente, se da por sentado que los eventos $s_1, \ldots, s_n$ son estocásticamente independientes.

Notación: el símbolo s_{-i} significa el $(n-1)$-tuplo ordenado que resulta de eliminar el componente s_i del perfil $s = (s_1, \ldots, s_{i-1}, s_i, s_{i+1}, \ldots s_n)$; *i.e.*, $s_{-i} = (s_1, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots s_n)$. Por convención, (s_i, s_{-i}) denota el perfil $s = (s_1, \ldots, s_{i-1}, s_i, s_{i+1}, \ldots s_n)$. El conjunto de los perfiles s_{-i} es denotado por S_{-i}. Una explicación análoga vale para los símbolos σ_{-i} y Σ_{-i}.

Uno de los conceptos centrales de la teoría de los juegos es el concepto de expectativa o utilidad esperada, el cual se puede definir como sigue.

EL TEOREMA DE NASH

DEFINICIÓN 1. La *utilidad esperada*, $u_i(\sigma)$, del perfil de estrategias mixtas σ para el agente i está dada por la siguiente identidad:

$$u_i(\sigma) = \sum_{s \in S} u_i(s) \cdot \sigma(s)$$

En términos del concepto de utilidad esperada se puede definir el concepto de equilibrio como sigue.

DEFINICIÓN 2. Un *equilibrio de Nash* es un punto $\sigma = (\hat{\sigma}_1, \ldots, \hat{\sigma}_n) \in \Sigma$ tal que, $\forall i \in \mathscr{I}$ y $\sigma_i \in \Sigma_i$:

$$u_i(\hat{\sigma}_i, \hat{\sigma}_{-i}) \geq u_i(\sigma_i, \hat{\sigma}_{-i}).$$

La ley fundamental de la teoría de los juegos es que cada jugador actúa de modo "racional", en el sentido de que maximiza su utilidad esperada reaccionando a cualquier perfil de los demás jugadores. Esto significa que al perfil $\sigma_{-i} \in \Sigma_{-i}$ el agente i reacciona eligiendo una estrategia mixta ρ_i tal que

$$u_i(\rho_i, \sigma_{-i}) = \max_{\tau_i \in \Sigma_i} u_i(\tau_i, \sigma_{-i}).$$

Esto conduce naturalmente al siguiente concepto.

DEFINICIÓN 3. La *correspondencia de reacción* del jugador i es una correspondencia $r_i : \Sigma \to \Sigma_i$ definida por la condición

$$r_i(\sigma) = \{\rho_i \in \Sigma_i \,|\, u_i(\rho_i, \sigma_{-i}) = \max_{\tau \in \Sigma_i} u_i(\tau, \sigma_{-i})\}.$$

La correspondencia de reacción del jugador i, así, lo que hace es asignar a cada perfil de estrategias mixtas $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ el conjunto de las estrategias mixtas de i que maximizan la utilidad esperada de i si los otros jugadores adoptan las estrategias mixtas $\sigma_{-i} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_{i-1}, \sigma_{i+1}, \ldots, \sigma_n)$. O sea, para cada $i \in \mathscr{I}$, r_i asigna a cada perfil de estrategias mixtas σ el conjunto de todas las estrategias del $i$ésimo jugador que maximizan su utilidad esperada dado que los otros jugadores escogieron las estrategias σ_{-i}. Es necesario contar con un recurso conceptual para describir la conducta efectivamente observada de los jugadores, o la conducta que deberían observar si la ley de la teoría se toma de manera normativa. Para ello introduzco las funciones η_i como se estipula en la siguiente definición.

Revista ENERGEIA ISSN: 1666 - 5732 Vol. VI, Num. 1, 2019 xx - xx
Sociedad Ibero-Americana de Metodología Económica

DEFINICIÓN 4. $\mathfrak{A}$ es un *juego en forma estratégica* syss existe un entero positivo $n \geq 2$ tal que

(0) $\mathfrak{A} = \langle \mathscr{I}, S_1, \ldots, S_n, u_1, \ldots u_n, \eta_1, \ldots, \eta_n \rangle$;

(1) $\mathscr{I}$ es el conjunto $\{1, \ldots, n\}$ de los primeros n enteros positivos.

(2) $\forall i \in \mathscr{I}$: S_i es un conjunto no vacío;

(3) $\forall i \in \mathscr{I}$: $u_i : \times_{i \in \mathscr{I}} S_i \to \mathbb{R}$;

(4) $\forall i \in \mathscr{I}$: $\eta_i : \Sigma \to \Sigma_i$ es una función tal que $\eta_i(\tau_i, \sigma_{-i}) = \eta_i(\rho_i, \sigma_{-i})$ para todo perfil parcial σ_{-i} y para todo par de estrategias $\tau_i, \rho_i \in \Sigma_i$.

(5) $\forall i \in \mathscr{I}$: η_i es una correspondencia de reacción.

Obsérvese que el axioma (5) es una formulación de la ley fundamental de la teoría de los juegos. Notación: si definimos la correspondencia $r : \Sigma \to \Sigma$ mediante la condición

$$r(\sigma) = r_1(\sigma) \times \cdots \times r_n(\sigma),$$

entonces una estrategia conjunta $\hat{\sigma} = (\hat{\sigma}_1, \ldots, \hat{\sigma}_n)$ es un equilibrio de Nash para el juego syss $u_i(\hat{\sigma}_i, \hat{\sigma}_{-i}) = \text{máx } u(\tau_i, \hat{\sigma}_{-i})$ para todo $i \in \mathscr{I}$; *i.e.*, si $\hat{\sigma}_i \in r_i(\hat{\sigma})$ para todo $i \in \mathscr{I}$. Esto es equivalente a decir que $\hat{\sigma} \in r(\hat{\sigma})$ o —lo que es lo mismo— que $\hat{\sigma}$ es un punto fijo de r. En resumen, un equilibrio de Nash para el juego es un punto fijo de la correspondencia r. El teorema de Nash es precisamente la siguiente proposición:

Todo juego finito en forma estratégica tiene un equilibrio en estrategias mixtas.

2. Demostración del teorema de Nash

Sean X y Y subconjuntos de espacios vectoriales reales. Recordemos que una *correspondencia* $\varphi : X \to Y$ de X en Y es una función de X en el conjunto potencia de Y, $\mathbf{pot}(Y)$, que asigna a cada elemento x de X un subconjunto no vacío $\varphi(x)$ en $\mathbf{pot}(Y)$. La *gráfica* de una correspondencia φ es un subconjunto del producto cartesiano $X \times Y$ definido por

$$G(\varphi) = \{(x, y) \in X \times Y \mid y \in \varphi(x)\}.$$

EL TEOREMA DE NASH

Una correspondencia $\varphi : X \to Y$ *asume valores convexos* si $\varphi(x)$ es convexo para todo $x \in X$. Una *vecindad* V de un punto $x \in X$ es un conjunto abierto, con respecto a la topología inducida por la métrica euclideana, que contiene a x.

Una correspondencia $\varphi : X \to Y$ de X en Y es *semicontinua superiormente (scs) en el punto* x_0 syss se cumple la siguiente condición: si (x_k) es una secuencia en X que converge a x_0, (y_k) es una secuencia en Y que converge a un punto y_0, y $y_k \in \varphi(x_k)$ para todo k, entonces $y_0 \in \varphi(x_0)$. φ es *scs sobre* X o *tiene una gráfica cerrada* si es scs en cada punto de X. De manera concisa:

$$[(x_k) \to x_0, \quad (y_k) \to y_0, \quad y_k \in \varphi(x_k)] \Rightarrow [y_0 \in \varphi(x_0)].$$

Análogamente, una correspondencia $\varphi : X \to Y$ es *semicontinua inferiormente en el punto* x_0 (sci) syss, para toda secuencia (x_k) que converge al punto x_0 en X y $y_0 \in \varphi(x_0)$, existe una secuencia (y_k) que converge a y_0 en Y tal que $y_k \in \varphi(x_k)$ para todo k. φ es sci *sobre* X si lo es en cada punto de X. Más concisamente:

$$[(x_k) \to x_0, \quad y_0 \in \varphi(x_0)] \Rightarrow [\text{existe } (y_k) \text{ tal que } (y_k) \to y_0 \text{ y } y_k \in \varphi(x_k)].$$

Una correspondencia $\varphi : X \to Y$ es *continua en el punto* x_0 si φ es a la vez scs y sci en x_0. La correspondencia es continua *sobre* X si lo es en cada punto de X. Un *punto fijo* de una correspondencia $\varphi : X \to X$ es un elemento $x_0 \in X$ tal que $x_0 \in \varphi(x_0)$.

LEMA 1. *Si $\varphi : X \to Y$ es una correspondencia scs en $x \in X$ entonces $\varphi(x)$ es compacto.*

Demostración: Supóngase que φ es scs en x, sea (y_k) una secuencia arbitraria en $\varphi(x)$ que converge al límite y_0, y considérese la secuencia que consta de x misma repetida (la cual converge trivialmente a x). Es inmediato que $y_0 \in \varphi(x)$, con lo que se ve que $\varphi(x)$ es cerrado. □

LEMA 2. *Si $\varphi_i : X \to X_i$ es una correspondencia scs para cada $i = 1, \ldots, n$, entonces la correspondencia $\varphi : X \to X$, definida por la condición $\varphi(x) = \times_{i=1}^{n} \varphi_i(x)$, donde $X = \times_{i=1}^{n} X_i$, también es scs.*

Demostración: Sea x_0 un punto de X, (x_k) una secuencia en X que converge a x_0 y $(y_k) = (y_{k_1}, \ldots, y_{k_n})$ ($y_{k_i} \in Y_i$ para $i = 1, \ldots, n$) una secuencia en Y, que converge

Revista ENERGEIA ISSN: 1666 - 5732 Vol. VI, Num. 1, 2019 xx - xx
Sociedad Ibero-Americana de Metodología Económica

a un punto y_0 en Y, tal que $y_k \in \varphi(x_k)$. Para demostrar que $y_0 \in \varphi(x_0)$ notemos, en primer lugar, que cada una de las secuencias coordenadas también es convergente, convergiendo la secuencia (y_{k_i}) al punto y_{i_0} de Y_i. Por lo demás, $y_k \in \varphi(x_k)$ significa que $y_{k_i} \in \varphi_i(x_k)$ lo cual implica —puesto que φ_i es scs— que $y_{i_0} \in \varphi_i(x_0)$. Se concluye que $y_0 = (y_{1_0}, \ldots, y_{n_0}) \in \times_{i=1}^{n} \varphi_i(x_0) = \varphi(x_0)$. □

Recordemos que el teorema de Kakutani nos garantiza que si X es un subconjunto no vacío, convexo y compacto de un espacio euclideano, y $\varphi : X \to X$ es una correspondencia semicontinua superiormente que asume valores convexos, entonces φ tiene un punto fijo. Un caso especial de este teorema es el teorema de Brouwer, el cual establece que si X es un subconjunto no vacío, convexo y compacto de un espacio euclideano, y $f : X \to X$ es una función continua, entonces f tiene un punto fijo. En efecto, si f es continua entonces la correspondencia $\varphi : X \to X$ definida por $\varphi(x) = \{f(x)\}$ es scs, de modo que tiene un punto fijo x_0. Es fácil ver que x_0 es un punto fijo de f también.

LEMA 3. (WEIERSTRASS) *Sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función cuyo dominio es compacto. Si f es continua en X entonces f tiene tanto un mínimo como un máximo.*

Demostración: Es suficiente que la imagen de f, $\mathbf{im}\, f$, sea compacto para que la función tenga tanto mínimo como máximo. En efecto, si $\mathbf{im}\, f$ es acotado entonces tiene tanto un supremo como un ínfimo; pero si $\mathbf{im}\, f$ es cerrado entonces tales extremos pertenecen a $\mathbf{im}\, f$ y son el máximo y el mínimo de la función.

Si $\mathbf{im}\, f$ no fuera acotado, habría una secuencia estrictamente creciente (o decreciente) $(f(x_k))$ de puntos de $\mathbf{im}\, f$ tal que, para todo $r > 0$, existe un entero positivo N tal que, para todo $k > N$, $|f(x_k)| > r$. Sin embargo, como X es compacto, la secuencia (x_k) tiene una subsecuencia convergente (x_j) y es así que, por la continuidad de f, la secuencia $(f(x_j))$ converge a un punto $y_0 = f(x_0)$ de $\mathbb{R}$. Esto quiere decir que para todo $\varepsilon > 0$ existe un entero positivo N tal que, para todo $j > N$, $|f(x_0) - f(x_j)| < \varepsilon$. Esto implica que la secuencia no se aleja más allá de una distancia ε de $f(x_0)$, por lo que no puede haber términos de la misma mayores en valor absoluto que algún r especificado. Esto claramente contradice que, para todo $k > N$, $|f(x_k)| > r$.

Más aun, si (y_k) es una secuencia convergente con límite y_0 en $\mathbf{im}\, f$, sea —como antes— (x_k) una secuencia en X tal que $y_k = f(x_k)$ $(k = 1, 2, \dots)$. Nuevamente, hay una subsecuencia (x_j) de (x_k) en X, que converge a un punto x_0 de X, tal que $y_j = f(x_j)$. Como toda subsecuencia de una secuencia convergente converge al mismo límite, por la continuidad de f el límite de (y_k) es precisamente $y_0 = f(x_0)$ que claramente pertenece a $\mathbf{im}\, f$. Esto establece que $\mathbf{im}\, f$ es cerrado. □

LEMA 4. *Si $X_1, \dots X_n$ es una familia de subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^m$, entonces $X = \times_{j=1}^{n} X_j$ es compacto en el espacio producto $\mathbb{R}^{mn}$.*

Demostración: Como $X_1, \dots, X_n$ son acotados, existen puntos $x_1, \dots, x_n$ $(x_i \in X_i$ para $i = 1, \dots, n)$ y bolas cerradas $B(x_1, \varepsilon_1), \dots, B(x_n, \varepsilon_n)$ centradas en $x_1, \dots, x_n$ y con radios $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ respectivamente, tales que $X_i \subseteq B(x_i, \varepsilon_i)$. Sea $r = [\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2]^{1/2}$ y $x = (x_1, \dots x_n)$. Entonces es fácil ver que $X \subseteq B(x, r)$. En efecto, si $y = (y_1, \dots, y_n) \in X$, entonces $d(x_i, y_i) < \varepsilon_i \leq r$ y, por ende, $d(x, y) = ([d(x_1, y_1)]^2 + \cdots + [d(x_n, y_n)]^2)^{1/2} \leq [\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2]^{1/2} = r$.

Sea ahora $(x_k) = (x_{k_1}, \dots, x_{k_n})$ una secuencia convergente de puntos de X. Entonces la secuencia (x_{k_i}) $(i = 1, \dots, n)$ converge a un punto x_{i_0} que está en X_i porque X_i es cerrado. Luego, el punto $x_0 = (x_{1_0}, \dots, x_{n_0})$, que es el límite de la secuencia $(x_k) = (x_{k_1}, \dots, x_{k_n})$, pertenece a X, lo cual establece que X es cerrado. □

LEMA 5. *Si $X_1, \dots X_n$ es una familia de subconjuntos convexos no vacíos de $\mathbb{R}^m$, entonces $\times_{j=1}^{n} X_j$ es un subconjunto convexo y no vacío de $\mathbb{R}^{mn}$.*

Demostración: Sean $x = (x_1, \dots, x_n)$ y $y = (y_1, \dots, y_n)$ elementos arbitrarios de X. Si $\alpha \in [0, 1]$, está claro que $\alpha x_i + (1 - \alpha) y_i \in X_i$ para todo $i = 1, \dots, n$. Por ende, $\alpha x + (1 - \alpha) y = (\alpha x_1 + (1 - \alpha) y_1, \dots, \alpha x_n + (1 - \alpha) y_n) \in X$. □

LEMA 6. *La función de utilidad esperada $u_i : \Sigma \to \mathbb{R}$ es continua para cada $i \in \mathcal{I}$.*

Demostración: Bastará demostrar que la función de utilidad esperada es multilineal en combinaciones convexas; es decir, para todo $i \in \mathcal{I}$ y $\alpha, \beta \in [0, 1]$ tales que $\alpha + \beta = 1$,

$$u_i(\alpha \tau_i + \beta \rho_i, \sigma_{-i}) = \alpha u_i(\tau_i, \sigma_{-i}) + \beta(\rho_i, \sigma_{-i}).$$

Revista ENERGEIA ISSN: 1666 - 5732 Vol. VI, Num. 1, 2019 xx - xx
Sociedad Ibero-Americana de Metodología Económica

Obsérvese que si $\tau_i, \rho_i \in \Sigma_i$ y $\alpha, \beta \in [0,1]$ con $\alpha + \beta = 1$, la función $\alpha\tau_i + \beta\rho_i$, definida por la condición

$$(\alpha\tau_i + \beta\rho_i)(s_i) = \alpha\tau_i(s_i) + \beta\rho_i(s_i),$$

es también una distribución de probabilidad sobre S_i. En efecto,

$$\begin{aligned}\sum_{s_i \in S_i}[\alpha\tau_i(s_i) + \beta\rho_i(s_i)] &= \alpha\sum_{s_i \in S_i}\tau_i(s_i) + \beta\sum_{s_i \in S_i}\rho_i(s_i) \\ &= \alpha + \beta \\ &= 1.\end{aligned}$$

Por consiguiente si $\alpha, \beta \in [0,1]$ con $\alpha + \beta = 1$ y $\tau_i, \rho_i \in \Sigma_i$ entonces $\alpha\tau_i + \beta\rho_i \in \Sigma_i$ y

$$\begin{aligned}u_i(\alpha\tau_i + \beta\rho_i, \sigma_{-i}) &= \sum_{s \in S} u_i(s)\cdot[\alpha\tau_i(s) + \beta\rho_i(s)]\cdot\prod_{j \neq i}\sigma_j(s) \\ &= \sum_{s \in S}\left\{[u_i(s)\cdot\alpha\tau_i(s)\cdot\prod_{j \neq i}\sigma_j(s)] + [u_i(s)\cdot\beta\rho_i(s)\cdot\prod_{j \neq i}\sigma_j(s)]\right\} \\ &= \sum_{s \in S} u_i(s)\cdot\alpha\tau_i(s)\cdot\prod_{j \neq i}\sigma_j(s) + \sum_{s \in S} u_i(s)\cdot\beta\rho_i(s)\cdot\prod_{j \neq i}\sigma_j(s) \\ &= \alpha\sum_{s \in S} u_i(s)\cdot\tau_i(s)\cdot\prod_{j \neq i}\sigma_j(s) + \beta\sum_{s \in S} u_i(s)\cdot\rho_i(s)\cdot\prod_{j \neq i}\sigma_j(s) \\ &= \alpha u_i(\tau_i, \sigma_{-i}) + \beta u_i(\rho_i, \sigma_{-i}). \ \square\end{aligned}$$

TEOREMA. [Nash, 1950] *Todo juego en forma estratégica tiene un equilibrio en estrategias mixtas.*

Demostración: Sea $r : \Sigma \to \Sigma$ la correspondencia definida mediante la condición

$$r(\sigma) = r_1(\sigma) \times \cdots \times r_n(\sigma).$$

Sólo hay que demostrar que r tiene un punto fijo, para lo cual necesitamos usar el teorema de Kakutani. Por ende, es suficiente establecer lo siguiente:

(1) Σ es un subconjunto no vacío y convexo de un espacio euclideano;

(2) Σ es compacto;

(3) r_i, y por ende r es una correspondencia scs para todo $i \in \mathscr{I}$;

(4) $r(\sigma)$ es convexo para todo $\sigma \in \Sigma$.

Vimos en la demostración del Lema 6 que, para cada $i \in \mathscr{I}$, Σ_i es convexo. Ello también se puede ver por el hecho de que Σ_i es un simplex de dimensión $\mathbf{card}\, S_i - 1$, lo cual incidentalmente muestra que también es compacto. Así, como ninguno de los Σ_i es vacío, se sigue por el Lema 5 que Σ es convexo y no vacío. Asimismo, como cada Σ_i es compacto, se sigue por el Lema 4 que Σ es compacto.

Para mostrar (3), sabemos por el Lema 2 que el producto cartesiano de correspondencias scs es una correspondencia scs, por lo que sólo tenemos que demostrar que r_i es una correspondencia y que es scs para i arbitrario. Antes que nada, notamos que $r_i(\sigma)$ es un subconjunto no vacío de Σ_i, pues Σ es compacto y u_i es continua en Σ. Sea pues σ_0 un punto arbitrario de Σ, (σ_k) una secuencia en Σ que converge al límite σ_0, (τ_k) una secuencia en Σ_i que converge a τ_0, y supóngase que $\tau_k \in r_i(\sigma_k)$ para todo k. Tenemos que mostrar que $\tau_0 \in r_i(\sigma_0)$. Pero el hecho de que τ_k está en $r_i(\sigma_k)$ implica que $u_i(\tau_k, \sigma_{k,-i}) \geq u_i(\rho, \sigma_{k,-i})$ para todo $\rho \in \Sigma_i$. En el límite, $u_i(\tau_0, \sigma_{k,-i}) \geq u_i(\rho, \sigma_{k,-i})$, de modo que $\tau_0 \in r_i(\sigma_0)$.

Finalmente, mostraremos que $r_i(\sigma)$ es convexo para $\sigma \in \Sigma$ arbitrario. Sean α y β números no negativos tales que $\alpha + \beta = 1$, y sean $\tau_i, \rho_i \in r_i(\sigma)$. Entonces $u_i(\tau_i, \sigma_{-i}) = u_i(\rho_i, \sigma_{-i}) = \text{máx}\, u_i(\sigma_i, \sigma_{-i})$ y tenemos —puesto que u_i es lineal en el $i$ésimo componente— $u_i(\alpha\tau_i + \beta\rho_i, \sigma_{-i}) = \alpha u_i(\tau_i, \sigma_{-i}) + \beta u_i(\rho_i, \sigma_{-i}) = \text{máx}\, u_i(\sigma_i, \sigma_{-i})$, de donde $\alpha\tau_i + \beta\rho_i \in r_i(\sigma)$. □

Referencias

Kakutani, S., 1941, "A Generalization of Brouwer's Fixed Point Theorem", *Duke Mathematical Journal*, vol. 8, no. 3, pp. 457–459.

Nash, J. F., 1950, "Equilibrium Points in *N*-Person Games", *Proceedings of the National Academy of Sciences*, vol. 36, no. 1, pp. 48–49.

Von Neumann, J. y Morgenstern, O., 1947, *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton University Press, Princeton, 1947.