Revista ENERGEIA
Sociedad Ibero-Americana de
Metodología Económica

ISSN: 1666-5732

Vol. VI, Núm. 1, 2019, 67-76

La relevancia de los supuestos matemáticos implícitos en modelos de teoría económica*

LEOBARDO PLATA PÉREZ**
Universidad Autónoma de San Luis Potosí

Resumen
Proponemos que hay tres tipos de supuestos en la especificación de modelos de teoría económica: de tipo metodológico, de contenido económico y de contenido matemático. Los resultados teóricos dependen de los supuestos y estructuras matemáticas que se asumen. La existencia de utilidad puede no necesitar el supuesto de continuidad de las preferencias. En la misma línea de supuestos implícitos, presentamos ejemplos del uso incorrecto, desde nuestro punto de vista, del teorema de la utilidad esperada en dos presentaciones clásicas de decisiones bajo incertidumbre.
Palabras clave: Metodología en Teoría Económica, Existencia de Función de Utilidad, Representación de Preferencias, Teoría de la Utilidad Esperada, Enseñanza de la Microeconomía, Economía, Supuestos Matemáticos.
Clasificación JEL: B41, D11, D81, A23

The relevance of implicit mathematical assumptions in economic theory models

Abstract
We propose three types of assumptions in the specification of economic theory models: methodological, economic content and mathematical content assumptions. The theoretical results depend on the assumptions and mathematical structures that are assumed. In the same line of implicit assumptions, we present examples of the incorrect use, from our point of view, of the expected utility theorem in two classic presentations of decision making under uncertainty.
Keywords: Economic Theory Methodology, Utility Function Existence, Preference Representation, Expected Utility Theory, Teaching of Microeconomics, Mathematical Assumptions.
JEL Classification: B41, D11, D81, A23

Recibido: 21/09/19; Aceptado: 11/02/20
http://orcid.org/0000-0002-8544-9661
* Este trabajo se presentó en ocasión a la Conferencia sobre Metodología de la Ciencia Económica, 2018, https://www.siame-s.com/ , en la Universidad Autónoma de San Luis Potosí.
** El autor agradece los dos comentarios hechos al presente trabajo.

Introducción

La realidad económica es representada y analizada, por los teóricos de la economía a través de modelos que tratan de representar los acontecimientos relevantes de la economía del día a día. La mayoría de las veces estos modelos son representados en lenguaje matemático. Esto es importante para tener un cierto control lógico-metodológico sobre las estructuras representadas. El pretendido "isomorfismo" entre realidad y modelo que la representa, siempre esta modulado por alguna relación de equivalencia que nos permite representar objetos y relaciones distintas como el mismo objeto. Esto apoya el espíritu simplificador del modelo que intenta representar solamente las características más relevantes del fenómeno estudiado y representado. Es importante tener en cuenta que modelos simples representan relaciones de equivalencia menos finas y modelos más complejos representan relaciones de equivalencia más finas.

Desde nuestro punto de vista, el intento de acoplar realidad con modelo está siempre influido por el tipo de lenguaje y teoría matemática usada en la representación. Aunque la matemática usada en la modelación se presente como aparentemente objetiva e inocente, el modelo representado contiene supuestos matemáticos, generalmente cómodos y simplificadores desde el punto de vista matemático, pero posiblemente criticables desde el punto de vista económico y empírico.

En este trabajo ilustramos lo anterior analizando algunos ejemplos concretos que contienen una propiedad matemática o supuesto un tanto forzado, posiblemente no adaptable o criticable empíricamente en la situación modelada. Partimos del siguiente contexto. Los modelos intentan representar la realidad. Sabemos que esta tarea no es fácil. El mismo concepto de realidad no tiene una connotación universal. En Filosofía de la Ciencia es muy sabido que toda observación empírica contiene cargas teóricas.

Sostenemos que los modelos teóricos, de la teoría económica contemporánea, se construyen generalmente usando lenguaje matemático y conllevan tanto supuestos económicos como matemáticos. Sabemos que hay diversas estructuras matemáticas para tratar de representar diversos aspectos de la realidad. Hay objetos matemáticos que pertenecen a una estructura pero no a otra. Proposiciones matemáticas verdaderas en una estructura pero falsas en otras estructuras. La ecuación $x^2= -1$ se satisface en la estructura de los números complejos, pero no en la estructura de los números reales. La estructura compuesta por el conjunto de los números reales con sus operaciones, suma y producto, junto su relación de desigualdad, se usa para representar estructuras empíricas donde intervienen mediciones y comparaciones de diversas variables y fenómenos económicos. Hay una amplia teoría sobre representación de estructuras empíricas en la estructura numérica de los reales. La escala usada en cada medición limita el tipo de operaciones y juicios válidos e inválidos que se pueden realizar con la medición. En este trabajo sostenemos que el alcance y sentido de una afirmación de la teoría económica, está influido y delimitado por el tipo de supuesto o estructura matemática usada en el modelo teórico que intenta representar cierta realidad económica. Las distintas estructuras matemáticas pueden existir o no en la realidad. Pueden adaptarse muy bien o de manera un tanto forzada a la realidad que se pretende representar.

La existencia de funciones de utilidad en la teoría de decisiones del consumidor es un buen ejemplo de lo anterior. A los supuestos de transitividad y completitud de las preferencias hay que añadir la continuidad de las mismas si queremos obtener funciones de utilidad con valores en el conjunto de números reales. Pero el supuesto de continuidad de las preferencias no es necesario si la estructura de representación son los números reales no estándar. En la misma teoría del consumidor aparece otra situación interesante. La matriz de Slutsky representa los efectos sustitución del vector de demanda ante cambios en el vector de precios. En la teoría, con los supuestos estándar la matriz es simétrica y negativa semidefinida. Sin embargo, en estimaciones empíricas puede ocurrir que la matriz no resulte simétrica. La base del resultado de simetría es un supuesto matemático de continuidad de segundas derivadas de la función de gasto. Más adelante justificamos con mayor detalle estos hechos.

Así como ciertos resultados de la teoría económica descansan en supuestos matemáticos relativamente fuertes, también ocurre que se incurra en simplificaciones de presentación que descuidan aspectos matemáticos relevantes. Ilustramos discutiendo la modelización de la compra de una cantidad a asegurar y con la decisión de tiempo de dedicado a la conducta criminal. Ambos temas pertenecen a la teoría de decisiones bajo no certeza. Señalamos más abajo un uso no plenamente justificado de la teoría de la utilidad esperada.

En la sección dos se argumenta que en la construcción de los modelos de teoría económica hay al menos tres tipos de supuestos. Además de los supuestos metodológicos y los específicos de la teoría, añadimos los supuestos matemáticos como una categoría distinta y muy relevante. En la tercera sección se discuten las dos situaciones de la teoría del consumidor clásica y las dos situaciones de decisiones bajo no certeza. Finalizamos con algunas conclusiones.

Tres tipos de supuestos en la construcción de modelos de teoría económica

Desde nuestro punto de vista, hay al menos tres tipos de supuestos paralelos en la construcción de los modelos de la teoría económica.

Supuestos de principios metodológicos

En la teoría mayormente difundida y dominante en los últimos años hay un supuesto crucial relacionado con lo que se conoce como *individualismo metodológico*. Los hechos sociales observados provienen de la agregación de conductas individuales racionales, son el resultado de las mismas. Los agentes individuales son racionales. Esto significa que son capaces de clasificar y ordenar las alternativas a tomar en cuenta para su decisión, a fin de elegir la alternativa mayormente preferida. Cuando los agentes toman decisiones individuales en ambientes donde conocen y respetan las reglas se genera un resultado de interacción llamado equilibrio. Asumiendo racionalidad estándar representada por la maximización de funciones objetivo individuales que pueden o no considera la interacción con otros agentes, se llega a resultados que tratan de caracterizar los *estados de equilibrio* y sus posibles movimientos ante el cambio de parámetros clave en el modelo. Esencialmente este es el paradigma postulado en textos de microeconomía intermedia como Varian (2010).

Supuestos económicos específicos

Una vez postulados los supuestos metodológicos, los modelos presentan una serie de supuestos específicos a la situación estudiada. Esto se asemeja un tanto a la distinción entre modelos potenciales y a los modelos potenciales parciales, establecida por Moulines (1982). Un ejemplo muy conocido es el de la teoría sobre las decisiones de los consumidores. Los supuestos de la conducta optimizadora serían la parte potencial de la modelación. La parte potencial parcial corresponde a supuestos específicos como la monotonía de las preferencias o su convexidad. El primero para suponer que tener más es mejor que tener menos y el segundo para postular el gusto por la variedad y diversidad. La preferencia por cestas compuestas con mezclas de productos en lugar de cestas con poca diversificación. En la teoría de las decisiones de una empresa, la convexidad de los conjuntos de tecnología o la libre disponibilidad son supuestos de carácter económico muy específicos.

Supuestos matemáticos

Hay una tercera clase de supuestos que aparecen implícitos y generalmente no se especifican en la formulación de los modelos de la teoría económica. Estos supuestos no son inocentes y añaden al modelo una cierta camisa de fuerza que fija y limita su alcance. Nos referimos al uso del leguaje matemático y todas las teorías y herramientas que ello conlleva. Las variables de los modelos toman valores en el conjunto de los números reales. Las mediciones de las mismas y sus escalas son especificadas en este conjunto de números. ¿Nos hemos preguntado alguna vez si este constructo de los matemáticos tiene un referente en la realidad? Es posible que a los físicos e ingenieros no les preocupe la pregunta, pero considero que es relevante desde el punto de vista de los fundamentos de las teorías. Recordemos que los reales son una forma de completar la recta a partir de los racionales. Esencialmente los reales son los posibles límites de sucesiones convergentes de racionales. Una partición de estas sucesiones convergentes en clases de equivalencia es una forma de construir a los números reales. Sin embargo, hay también otras formas de recuperar la idea del continuo. La más conocida fue introducida por Abraham Robinson quien introduce los reales no estándar, una extensión de los reales que permite que los infinitesimales de Leibnitz tengan vida. Esto significa que los números infinitamente pequeños sí existen en el universo de los reales no estándar. Los inversos de los infinitesimales son mayores que cualquier natural y también existen en este universo no estándar. Un infinitesimal es un número mayor que cero y menor que cualquier $1/n$ con n natural. Es claro que estos no existen en los reales estándar. Recomendamos al lector interesado en el análisis no estándar la obra Calculus de Jerome Keisler.

En lo que sigue presentamos los cuatro casos anunciados arriba. Los dos primeros corresponden a la teoría del consumidor clásica e ilustran la importancia de un supuesto matemático que sostiene una afirmación importante de la teoría económica. Los dos restantes señalan un uso no plenamente justificado de la propiedad de la utilidad esperada en dos casos de decisiones bajo no certeza.

Cuatro casos para fijar la atención en la modelación

Continuidad de preferencias y existencia de funciones de utilidad

Es bien conocido que una preferencia completa y transitiva no es necesariamente representable mediante una función de utilidad. El orden lexicográfico definido en $\mathbf{R}^2{}_+$ es un claro ejemplo. Cualquier texto de microeconomía explica este ejemplo. El remedio tradicional al problema consiste en introducir el supuesto de continuidad de las preferencias.

Esto significa intuitivamente que las preferencias no dan saltos. Si una sucesión de puntos o alternativas X_n tiende al punto X y cada X_n resulta preferida a X, entonces $lim\ X_n$ es al menos tan preferida como X. Una formulación equivalente consiste en exigir que los conjuntos de contorno superior e inferior sean cerrados. El problema de la existencia de utilidad radica en este caso en el universo limitado de las funciones de utilidad. Estas funciones se definen como funciones de $\mathbf{R}^2{}_+$ en $\mathbf{R}$. Los valores de utilidad se restringen a los números reales. Si el universo de representación fuesen los números reales no estándar, $\mathbf{R}^*$, podríamos no exigir la continuidad de la preferencia y representar al orden lexicográfico mediante la función $u(x_1,x_2)=x_1+ix_2$, siendo i un número infinitesimal. El supuesto de continuidad de preferencia no es tan ingenuo como pudiera parecer. Concluimos afirmando:

El supuesto de continuidad de las preferencias es necesario para la existencia de utilidad en la estructura de los números reales. Se puede garantizar la existencia de utilidad sin el supuesto de continuidad de las preferencias, si se usa la estructura de los números reales no estándar

Simetría de la matriz de sustitución de Slutsky

El concepto de matriz de Slutsky aparece en la teoría de las decisiones del consumidor cuando queremos estudiar los cambios en el vector demanda provenientes de cambios en los precios. La ecuación de Slutsky nos dice que el cambio total en el vector demanda se puede descomponer en dos efectos. El primero se conoce como efecto sustitución y el segundo como efecto ingreso. La matriz de Slutsky, S, es la que incorpora todos los efectos sustitución. Bajo supuestos de continuidad, convexidad estricta y derivabilidad continua de las parciales respecto precios en la función de gasto, se obtiene que la matriz S es simétrica. Esto significa que $S_{ij}=S_{ji}$ para cada par de bienes i, j. Ello se debe esencialmente a que la matriz S es la segunda derivada de la matriz de gasto, $e(\boldsymbol{p},u)$ respecto del vector de precios $\boldsymbol{p}$

$$D^2_{\boldsymbol{p}}\, e(\boldsymbol{p},u)=S$$

La derivabilidad continua de las parciales de e respecto $\boldsymbol{p}$ permiten garantizar a través del teorema de Young que las derivadas cruzadas sean iguales. Sin embargo, el significado empírico de esto podría ser criticable. Pensemos en una situación inicial donde gastamos una cantidad 1000 unidades monetarias en nuestra cesta de consumo que consiste de dos mercancías únicamente. Una primera situación consiste en realizar un incremento pequeño en el precio del bien, seguido de un incremento pequeño en el precio de la mercancía dos. Es muy posible que para mantener nuestro nivel de utilidad haya que gastar más. En una segunda situación se realiza primero un incremento pequeño en el precio del dos, seguido de un incremento pequeño en el precio del bien uno. ¿Por qué tendría que coincidir el incremento del gasto en la primera situación con el incremento del gasto en la segunda situación? Afortunadamente la matriz de Slutsky puede ser estimada observando precios y compras de los agentes. Ahí podríamos verificar la viabilidad empírica de lo comentado en este punto. Recomendamos al lector interesado revisar la teoría del consumidor en los capítulos iniciales del texto de Jehle (2011). Concluimos este caso afirmando

La simetría de la matriz de sustitución de Slutsky proviene de un supuesto fuerte de continuidad de la segunda derivada de la función de gasto respecto precios. Pero empíricamente esta matriz puede no ser simétrica y no hay interpretación económica intuitiva que la avale.

Contratación de seguros

Un modelo muy conocido es el de la decisión de la cantidad por asegurar de un activo o bien, por parte de su propietario, cuando puede ocurrir un posible daño contingente. Lo que queremos señalar, en este caso, es un uso no plenamente justificado de la teoría de la utilidad esperada, teoría VNM en honor a John von Newman y Oskar Morgenstern. El escenario del problema es el siguiente:

$U(x)$: Función de utilidad monetaria de tipo Bernoulli que especifica la utilidad de tener x unidades monetarias de riqueza.
W: Valor de la riqueza inicial
D: Valor de una posible pérdida o daño a la riqueza
p: Probabilidad de que ocurra el posible daño
°: Costo por asegurar una unidad monetaria
x: Cantidad por asegurar (variable de decisión)

El individuo debe elegir la cantidad x, por asegurar, dadas sus preferencias por las diversas cantidades de riqueza, especificadas a través de la función de utilidad U, y los parámetros arriba especificados que resultan fuera de su control en el momento de la decisión. La función de utilidad se supone generalmente cóncava para reflejar aversión al riesgo. El concepto clave para representar la posible riqueza final, una vez que el evento aleatorio se ha realizado, es el concepto de lotería. La riqueza final, que depende del azar, se puede representar mediante la lotería, o juego, que paga W-D-γx+x con probabilidad p y paga W-γx con probabilidad 1-p. Cuando ocurre el incidente que causa el daño, con probabilidad p, el individuo recibe por parte del seguro la cantidad x contratada, pero debe restar de su riqueza la magnitud del daño y el pago al seguro por la cantidad asegurada. Cuando el daño no ocurre, el individuo resta de su riqueza simplemente la cantidad γx pagada al seguro por asegurar x unidades monetarias. El problema de decisión se plantea, formalmente, como la elección de la cantidad *x* por asegurar, antes de que ocurra el evento aleatorio del daño posible. Implícitamente, esta elección de *x*, elige la lotería que maximiza la preferencia sobre la valoración de la situación final, ya realizado el evento aleatorio. Las loterías se representan especificando cada posible pago final con la probabilidad de su ocurrencia. La preferencia sobre loterías es representada por la función de utilidad *U*. El problema se plantea entonces como sigue

$$\max_{x} U\,[\,p:(W-D-\gamma x+x);\ (1-p):(W-\gamma x)] \qquad (1)$$

La teoría VNM nos dice que el problema anterior se puede plantear como la maximización de la utilidad esperada de la lotería enfrentada. El axioma de independencia de dicha teoría es fundamental para lograr la "linealidad" de *U* respecto de las probabilidades que aparecen en las loterías. Debido a ello el problema se convierte en el siguiente.

$$\max_{x}\ pU\,(W-D-\gamma x+x) + (1-p)U\,(W-\gamma x) \qquad (2)$$

En la versión (2) *U* se evalúa en loterías que otorgan premios monetarios con probabilidad uno. Es muy común introducir (2) como

$$\max_{x}\ pu(W-D-\gamma x+x) + (1-p)u(W-\gamma x) \qquad (3)$$

En la versión (3) la *u* es una función de reales no negativos en reales no negativos, se conoce como utilidad Bernoulli y valora cantidades directamente cantidades de dinero. La función *u*( ) supone no decreciente y continua. Es muy común que las presentaciones en texto, del problema de elección de seguro, se hagan iniciando directamente con la versión (3) en lugar de explicar los antecedentes (1) y (2). Pero independientemente de esto, el problema que notamos es más importante y lo describimos a continuación.

En cualquiera de las versiones (1)-(3) lo que se está eligiendo son loterías con premios variables y probabilidades fijas. Hay un abuso en la interpretación de la teoría VNM desarrollada en textos como Mas-Colell et. al. (1995, cap.6) o Jehle y Reny (2011, capítulo 2). En las presentaciones tradicionales de la teoría, lo que se elige son loterías o distribuciones de probabilidad donde varían las probabilidades y no los premios. De hecho, en el caso de número finito de estados finales, se representa el espacio de loterías mediante los conjuntos *n*-simplex donde los premios están asociados con los vértices o esquinas fijas, son las loterías degeneradas que ofrecen el premio asociado con probabilidad uno. La preferencia, base de la elección, compara loterías distintas con premios fijos y diferentes probabilidades. En (1)-(3) estamos comparando loterías con premios variables y probabilidades fijas. Siendo así, es incorrecto apelar a la aplicación de la teoría VNM reportada en los textos tradicionales de Microeconomía. Hay un abuso en la interpretación de la teoría VNM.

Una posible salida a lo anterior consiste en iniciar con el planteamiento del escenario, no hablar de optimización y señalar que debido a la teoría VNM se tiene que

$$U\,[\,p:(W-D-\gamma x+x);\ (1-p):(W-\gamma x)] = pu(W-D-\gamma x+x) + (1-p)u(W-\gamma x)$$

A partir de lo anterior, se puede introducir la optimización, en la variable *x*, de la función que aparece en el lado derecho de la igualdad. Con esto, se tienen los mismos resultados sin tener que asumir que estamos eligiendo loterías con premios variables y utilidades fijas.

Control de conducta criminal

Otro modelo donde aparece un problema similar al anterior es la modelación de un juego en dos etapas para analizar las decisiones de conducta criminal y su posible control. La raíz de este tipo de modelos proviene de Becker (1968). En la etapa 1 del juego el gobierno decide su política de control. Esta consiste en la elección de la probabilidad, p, de atrapar y juzgar a un individuo al que se sorprende cometiendo un delito. Como parte de la política de control está también la elección del tamaño del castigo impuesto, que se denota por F. En la etapa 2, un individuo observa estas señales y otras, como la ganancia obtenida trabajando en actividades legales contra la ganancia obtenida en actividades ilegales. A partir de ello, con base en la función de utilidad Bernoulli que representa sus preferencias monetarias, decide cómo repartir una unidad de tiempo disponible entre tiempo dedicado a actividades legales (t_l) y tiempo dedicado a actividades delictivas (t_c). La ganancia por una unidad de tiempo dedicada a las actividades legales es w_l y la ganancia por unidad de tiempo dedicada a actividades ilegales es w_c. Si el individuo es sorprendido y castigado tendrá un consumo X_a mientras que si no es sorprendido tendrá un consumo X_b. La lotería enfrentada se representa entonces con la notación $[p{:}X_a;\ (1-p){:}X_b]$. Las preferencias del individuo se representan por la función de utilidad esperada U que valora loterías y consumos contingentes. El problema de decisión del individuo se plantea como

$$\underset{t_c,\ t_l}{Max}\ EU(X) = pU(X_a) + (1-p)\,U(X_b)$$
$$\text{s.a.}\quad t_c+t_l=1$$

De acuerdo con lo especificado arriba, el problema puede plantearse en términos de una variable de decisión como

$$Max\ \ pU(w_c t_c+ w_l(1-t_c) - t_c F) + (1-p)\,U(w_c t_c+ w_l(1-t_c))$$
$$0\leq t_c\leq 1$$

Notemos que nuevamente, si apelamos a la teoría VNM como justificación para la optimización, estamos eligiendo loterías con premios variables y probabilidades fijas.

Las presentaciones estándar de la teoría de la utilidad esperada asumen probabilidades variables y premios fijos. La decisión de lotería óptima implica elegir entre diversas distribuciones de probabilidad. En las dos aplicaciones presentadas se apela a la teoría VNM. En las axiomatizaciones estándar de la teoría los premios son fijos y se eligen probabilidades pues las preferencias se construyen sobre distribuciones de probabilidad. Sin embargo, en las aplicaciones de los dos casos reportados se eligen premios considerando probabilidades fijas.

La conclusión de los dos casos anteriores es la siguiente.

Existen ejemplos del uso inadecuado de la teoría de la utilidad esperada. En la elección de la cantidad a asegurar y la elección de tiempo dedicado a actividades delictivas, *se modela optimizando eligiendo loterías sobre premios considerando probabilidades fijas. Las presentaciones de la teoría suponen premios fijos para elegir las probabilidades de la lotería óptima.*

Y con esto concluimos la tercera sección de este trabajo.

Conclusiones

Este trabajo señala dos puntos de interés metodológico en la modelación de la teoría económica. El primero se refiere a la no neutralidad del uso de las matemáticas en la teoría económica. Hemos explicado la relación del axioma de continuidad de las preferencias con la representación de preferencias en el universo de los números reales. El axioma se podría omitir si en lugar de los números reales usamos su extensión al universo de los reales no estándar. El segundo tema abordado se refiere al uso no adecuado, desde nuestro punto de vista, de la teoría VNM en las presentaciones comunes de la elección de seguros y la elección dl tiempo dedicado a actividades delictivas. En ambos casos se optimiza eligiendo loterías con premios variables y distribuciones de probabilidad fijas. Mientras que en las presentaciones de la teoría VNM, las preferencias suponen variables a las distribuciones de probabilidad y mantienen premios fijos.

Lo anterior no representa de ninguna manera una crítica al uso de las matemáticas en los modelos de teoría económica. La historia nos ha demostrado la enorme utilidad del uso de la matemática en toda la ciencia, particularmente en la teoría económica de los últimos cien años. Lo importante a señalar son las implicaciones simplificadoras que pudieran no cumplirse en la realidad. Las estructuras matemáticas imponen cierta rigidez que la realidad podría no tener. Tanto la matemática como la realidad están en constante evolución y cambio. La duda fundamental es si las estructuras dinámicas subyacentes son las mismas o no.

Referencias

BECKER, G. (1968). "Crime and Punishment: An Economic Approach", *Journal of Political Economy*, Vol 76, No. 2, pp. 179-217.

JEHLE, G. Y RENY, P. (2011). *Advanced Microeconomic Theory*, Third Edition, Addison Wesley Longman.

MAS-COLELL, WHINSTON Y GREEN (1995). *Microeconomic Theory*, Oxford University Press.

MOULINES, C.U. (1982). *Exploraciones Metacientíficas*, Madrid: Alianza Editorial.

VARIAN, H. (2010). *Microeconomía Intermedia,* Barcelona: Antoni Bosch, 8ª edición.